

## CRITERE D'APPARITION DE LA CONVECTION NATURELLE DANS DES COUCHES POREUSES STRATIFIEES

J. P. RICHARD† et J. GOUNOT\*

Laboratoire de Mécanique Physique (E.R.A. CNRS No. 769),  
 Université de Bordeaux I-33405, Talence Cedex, France

(Reçu le 10 décembre 1980)

**Résumé**—Un modèle très général de détermination du critère d'apparition de la convection naturelle en milieu poreux est proposé. Ce modèle s'applique à des milieux constitués de  $n$  strates anisotropes superposées. Le système classique d'équations aux dérivées partielles est transformé en un système d'équations différentielles d'ordre 4 par la transformation de Laplace. Cette méthode est ensuite développée dans le cas de deux strates homogènes et isotropes saturées par un fluide de Boussinesq.

### NOMENCLATURE

$a$ ,	taille réduite des cellules de convection, liée à un mode convectif;
$c_p$ ,	chaleur massique à pression constante du fluide;
$Cte$ ,	constante;
$f$ ,	fonction caractéristique de la perturbation de température;
$F$ ,	transformée de Laplace de $(\xi)$ ;
$\mathbf{F}$ ,	vecteur colonne des inconnues;
$g$ ,	accélération de la pesanteur;
$g$ ,	fonction antécédent de $1/P(s)$ ;
$H$ ,	hauteur;
$H$ ,	relation liant $a$ et $Ra^*$ ;
$K$ ,	perméabilité;
$\mathbf{M}$ ,	matrice;
$P$ ,	pression;
$P$ ,	polynôme caractéristique de $F(s)$ ;
$Q$ ,	facteur d'anisotropie;
$Ra^*$ ,	nombre de Rayleigh;
$r, t$ ,	coefficient entrant dans l'expression de $g(\xi)$ ;
$s$ ,	variable dans l'espace des transformées de Laplace;
$T$ ,	température;
$\mathbf{V}(u, v, w)$ ,	vecteur vitesse de composantes $u, v$ et $w$ ;
$x, y, z$ ,	variables d'espace.

### Greek symbols

$\alpha$ ,	coefficient d'expansion thermique volumique du fluide;
$\delta$ ,	coefficient entrant dans les expressions de $r$ et $t$ ;
$\Phi_0$ ,	densité de flux de chaleur dans l'état conductif ( $\Phi_0 = \Phi_0 \mathbf{k}$ );
$\bar{\omega}(x, y, z)$ ,	perturbation de pression;
$\lambda^*$ ,	conductivité thermique équivalente du milieu poreux;

$v$ ,	$= l - \xi$ ;
$\xi$ ,	$= z/H$ ;
$\rho$ ,	masse volumique du fluide;
$\tau(x, y, z)$ ,	perturbation de température;
$\phi$ ,	densité surfacique de flux de chaleur;
$v, \xi$ ,	variables adimensionnelles;
$\eta$ ,	viscosité dynamique du fluide;
$\theta$ ,	coefficient caractéristique de chaque strate;
$\Psi(x, y, z)$ ,	fonction de courant;

### Indices

$\circ$ ,	caractérise l'état préconvectif;
$c$ ,	critique;
$C, F$ ,	chaud, froid;
$h, v$ ,	horizontal, vertical;
$i$ ,	relatif à la strate $i$ ;
$m$ ,	monostrate;
$0$ ,	relatif à un état non-convectif;
$r$ ,	relatif aux valeurs de référence.

### 1. INTRODUCTION

LES CRITERES d'apparition de la convection naturelle, ou de transition entre différents types de mouvements thermoconvectifs ont été étudiés dans un grand nombre de configurations. Dans le cas d'une couche poreuse horizontale, limitée par des surfaces isothermes et imperméables, le critère d'apparition a été précisé dans des conditions variées :

pour un fluide saturant répondant aux hypothèses de Boussinesq le milieu étant homogène et isotrope [1-3] ou présentant une anisotropie de forme simple [4-6];  
 lorsque l'hypothèse de Boussinesq est inapplicable [7].

Green a étudié des milieux hétérogènes dont la perméabilité et la conductivité thermique varient de façon continue dans la couche [8]. Enfin, McKibbin et O'Sullivan [9] ont fait une étude générale des milieux stratifiés isotropes, avec deux types de conditions aux limites, la méthode qu'ils ont utilisée leur permet non seulement d'étudier le critère d'apparition de la

\* An English version of this paper is available from J.G.

† Adresse actuelle : S.N.E.C.M.A. YKR1 Melun Villaroche, 77550 Moissy Cramayel, France.

convection, mais également de préciser la forme de mouvements susceptibles de se développer.

Ce travail présente une méthode très générale de détermination du critère d'apparition de la convection naturelle dans le cas d'un milieu hétérogène constitué par plusieurs strates de caractéristiques différentes, limitées par des plans parallèles. Les résultats présentés sont relatifs à des bistrates homogènes, saturés par un fluide de Boussinesq, la séparation entre les strates étant perméable et infiniment mince.

## 2. ETUDE THEORIQUE DU CAS GENERAL

On considère une couche poreuse formée de  $n$  strates d'extension latérale infinie, de hauteur  $H$ , limitée supérieurement et inférieurement par deux surfaces horizontales et isothermes, respectivement aux températures  $T_F$  et  $T_C$  ( $T_C = T_F + \Delta T$ ;  $\Delta T > 0$ ). Chaque strate est homogène et caractérisée par son épaisseur  $H_i$ . Nous supposons de surcroît que chaque strate présente une anisotropie de forme simple correspondant à des tenseurs de perméabilité et de conductivité thermique équivalente de la forme

$$\begin{aligned} \bar{K} &= (K_{hi}, K_{hv}, K_{vi}) \\ \lambda_i^* &= (\lambda_{hi}^*, \lambda_{hv}^*, \lambda_{vi}^*). \end{aligned} \quad (1)$$

### 2.1. Etablissement du système d'équations différentielles

Au sein de chaque strate, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, s'écrivent compte tenu des hypothèses

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

$$-\nabla P + \rho g - \eta \bar{K}^{-1} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\lambda}_i^* \cdot \nabla T) - \rho c_p (\nabla T) \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4)$$

où  $g$  est le vecteur accélération de la pesanteur,  $P$  la pression,  $\mathbf{V}(u, v, w)$  la vitesse de filtration,  $T$  la température et  $\rho$  masse volumique du fluide déterminée à partir d'un état de référence ( $\rho_r, T_r$ ) par :

$$\rho = \rho_r \{1 - \alpha(T - T_r)\}. \quad (5)$$

La recherche d'un critère d'apparition de la convection consiste en l'étude des possibilités d'existence de mouvements convectifs, déterminés par des solutions  $(P, \mathbf{V}, T)$  avec  $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ , solutions que l'on peut écrire comme étant la somme de fonctions représentant l'état de repos ( $P_0, \mathbf{0}, T_0$ ) et de fonctions que l'on pourra considérer comme des perturbations par rapport à cet état de repos. Soit

$$P = P_0 + \bar{\omega}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{0} + \mathbf{V}, \quad T = T_0 + \tau. \quad (6)$$

L'état de repos, correspondant à une vitesse nulle et à une densité surfacique de flux de chaleur  $\Phi_0$  uniforme dans tout le milieu, satisfait à

$$-\nabla P_0 + \rho_0 g = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\lambda}_i^* \cdot \nabla T_0) = 0 \quad (8)$$

$$\Phi_0 = \nabla T_0 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (H_i / \lambda_{vi}^*) \right\}. \quad (9)$$

En soustrayant membre à membre les équations (7) et (8) aux équations (3) et (4) nous obtenons le système d'équations auxquelles satisfont les perturbations de pression, vitesse et température au sein de chaque strate

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\nabla \bar{\omega} + \alpha \rho_r \tau g + \eta \bar{K}_i^{-1} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\lambda}_i^* \cdot \nabla \tau) - \rho_r c_p (\nabla T_0) \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (12)$$

La méthode classique d'élimination des perturbations  $\bar{\omega}$ ,  $u$ ,  $v$  et  $w$  nous donne les  $n$  équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait la seule perturbation de température  $\tau$  dans les  $n$  strates ( $i \in \{1, n\}$ ) [3, 5, 9]:

$$\begin{aligned} (\partial^4 \tau / \partial z^4) + (Q_{ki} + Q_{li}) \nabla_{xy}^2 (\partial^2 \tau / \partial z^2) \\ + Q_{ki} Q_{li} \nabla_{xy}^2 \tau + Ra^* \theta_i (1/H^2) \nabla_{xy}^2 \tau = 0 \\ Ra^* \theta_i = (\rho_r c_p) \alpha (\rho_r / \eta) g \phi_0 (K_{hi} / \lambda_{vi}^{*2}) \end{aligned} \quad (13)$$

où  $Q_{ki}$  et  $Q_{li}$  sont des facteurs d'anisotropie de la strate  $i$  et  $\nabla_{xy}^2$  l'opérateur laplacien dans le plan horizontal

$$Q_{ki} = K_{hi} / K_{vi}, \quad Q_{li} = \lambda_{hi}^* / \lambda_{vi}^* \quad (14)$$

$$\nabla_{xy}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2. \quad (15)$$

On recherche une solution  $\tau(x, y, z)$  de la forme  $\tau(x, y, z) = \Psi(x, y) f_i(\xi)$  où  $f_i(\xi)$  est une fonction d'espace particulière à chaque strate ( $\xi = z/H$ ).  $\Psi(x, y)$  est alors solution de l'équation de Helmholtz, de nombre d'onde  $a/H$

$$\nabla_{xy}^2 \Psi + (a^2 / H^2) \Psi = 0. \quad (16)$$

L'étude se ramène à celle des solutions particulières de cette équation caractérisée par la valeur  $a/H$ . Ces solutions particulières permettent d'écrire l'équation à laquelle satisfait la fonction  $f_i(\xi)$ :

$$\begin{aligned} (d^4 f_i / d\xi^4) - a^2 (Q_{ki} + Q_{li}) (d^2 f_i / d\xi^2) \\ + (Q_{ki} Q_{li} a^4 - Ra^* \theta_i a^2) f_i = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

où  $a$  est la taille réduite des cellules de convection et  $Ra^*$  le nombre de Rayleigh de filtration de la couche poreuse défini à partir de valeurs de références  $K_{hr}$  et  $\lambda_{vr}^*$

$$Ra^* = (\rho_r c_p) \alpha (\rho_r / \eta) g H^2 \phi_0 (K_{hr} / \lambda_{vr}^{*2}) \quad (18)$$

$$\theta_i = (K_{hi} / \lambda_{vi}^{*2}) / (K_{hr} / \lambda_{vr}^{*2}). \quad (19)$$

Le choix de  $K_{hr}$  et  $\lambda_{vr}^*$  est arbitraire. Nous avons pris comme valeurs de référence de valeurs moyennes des  $K_{hi}$  et des  $\lambda_{vi}^*$  telles que

$$HK_{hr} = \sum_{i=1}^n (H_i K_{hi}), \quad H / \lambda_{vr}^* = \sum_{i=1}^n (H_i / \lambda_{vi}^*). \quad (20)$$

Dans ces conditions le nombre de Rayleigh de filtration s'écrit

$$Ra^* = (\rho_r c_p) \alpha (\rho_r / \eta) g H \Delta T (K_{hr} / \lambda_{vr}^*). \quad (21)$$

2.2. Méthode d'intégration du système d'équations différentielles

Par passage dans l'espace des transformées de Laplace, l'équation (17), équation différentielle d'ordre 4 à coefficients constants, devient une fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynôme bicarré [11]. En notant  $F_i(s)$  la transformée de Laplace de  $f_i(\xi)$ , il vient

$$F_i(s) = \{1/P_i(s)\} f_i^{(3)}(0) + s f_i^{(2)}(0) + \{s^2 - (Q_{\lambda i} + Q_{\kappa i})a^2\} + \{f_i^{(1)}(0) + s f_i(0)\} \quad (22)$$

$$P_i(s) = s^4 - a^2(Q_{\kappa i} + Q_{\lambda i})s^2 + (Q_{\kappa i}Q_{\lambda i}a^2 - Ra^*\theta_i a^2) \quad (23)$$

ou  $f_i^{(m)}(0)$  est la valeur que prend la dérivée d'ordre  $m$  de  $f_i$  en  $\xi = 0$ .

En notant  $g_i(\xi)$  l'antécédent de la fonction  $1/P_i(s)$  nous obtenons trois expressions possibles pour  $g_i(\xi)$  suivant les valeurs des zéros du polynôme  $P_i(s)$ , à savoir :

(a) si  $Ra^*\theta_i - Q_{\kappa i}Q_{\lambda i}a^2 < 0$

$$g_i(\xi) = \frac{1}{t_i^2 - r_i^2} \frac{1}{t_i r_i} \{r_i \text{sh}(t_i \xi) - t_i \text{sh}(r_i \xi)\} \quad (24)$$

(b) si  $Ra^*\theta_i - Q_{\kappa i}Q_{\lambda i}a^2 = 0$

$$g_i(\xi) = \frac{1}{r_i^3} \{\text{sh}(r_i \xi) - r_i \xi\} \quad (25)$$

(c) si  $Ra^*\theta_i - Q_{\kappa i}Q_{\lambda i}a^2 > 0$

$$g_i(\xi) = \frac{1}{t_i^2 + r_i^2} \frac{1}{t_i r_i} \{t_i \text{sn}(r_i \xi) - r_i \sin(t_i \xi)\} \quad (26)$$

avec

$$\delta_i = 4a^2 Ra^*\theta_i + a^4(Q_{\lambda i} - Q_{\kappa i})^2$$

$$r_i^2 = \{a^2(Q_{\kappa i} + Q_{\lambda i}) + \sqrt{\delta_i}\}/2 \quad (27)$$

$$t_i = [\{a^2(Q_{\kappa i} + Q_{\lambda i}) - \sqrt{\delta_i}\}/2].$$

La solution de l'équation différentielle relative à la strate  $i$  s'écrit alors, compte tenu des propriétés de la transformation de Laplace [11]

$$f_i(\xi) = f_i^{(3)}(0)g_i(\xi) + f_i^{(2)}(0)g_i^{(1)}(\xi) + f_i^{(1)}(0)\{g_i^{(2)}(\xi) - a^2(Q_{\kappa i}Q_{\lambda i})g_i(\xi)\} + f_i(0)\{g_i^{(3)}(\xi) - a^2(Q_{\kappa i}Q_{\lambda i})g_i^{(1)}(\xi)\}. \quad (28)$$

Il faut ici remarquer la similitude de ces résultats avec les solutions élémentaires proposées par McKibbin et O'Sullivan utilisant une méthode de résolution par développement en série limitée [9].

2.3. Prise en compte des conditions aux limites

Nous avons deux types de limites : les limites isothermes et imperméables de la couche poreuse et les  $n - 1$  interfaces séparant deux strates consécutives où nous avons continuité de la température, de la pression et des composantes verticales du flux de chaleur et de la vitesse.

A partir des expressions de  $\bar{\omega}$  et de  $w$  en fonction de  $\tau$  (expressions obtenues à partir des équations (10) à (12) ces conditions s'écrivent [10] :

en  $\xi = 0$ ,

$$f_1(0) = f_1^{(2)}(0) = 0 \quad (29)$$

en  $\xi = \xi_j$ ,

$$f_j(\xi_j) - f_{j+1}(\xi_j) = 0$$

$$\lambda_{vj}^* f_j^{(1)}(\xi_j) - \lambda_{v,j+1}^* f_{j+1}^{(1)}(\xi_j) = 0$$

$$\lambda_{vj}^{*2} \{Q_{\lambda j} a^2 f_j(\xi_j) - f_j^{(2)}(\xi_j)\} - \lambda_{v,j+1}^{*2} \{Q_{\lambda j+1} a^2 f_{j+1}(\xi_j) - f_{j+1}^{(2)}(\xi_j)\} = 0$$

$$(1/\theta_j) \{ (Ra^*\theta_j - Q_{\kappa j}Q_{\lambda j}a^2) f_j^{(-1)}(\xi_j) + Q_{\kappa j} f_j^{(1)}(\xi_j) \} - (1/\theta_{j+1}) \{ (Ra^*\theta_{j+1} - Q_{\kappa j+1}Q_{\lambda j+1}a^2) f_{j+1}^{(-1)}(\xi_j) + Q_{\kappa j+1} f_{j+1}^{(1)}(\xi_j) \} = 0 \quad (30)$$

en  $\xi = 1$  pour lequel, avec le changement de variable  $v = 1 - \xi$  :

$$h_n(v) = f_n(\xi), \quad h_n^{(2)}(0) = 0. \quad (31)$$

2.4. Conditions d'existence de la convection

Finalement, pour un tel milieu, nous avons un système de  $4n - 4$  équations à  $4n - 4$  inconnues :

$$f_i^{(m)}(0) \text{ avec } 1 \leq i \leq n \text{ et } 0 \leq m \leq 3$$

qui peut s'écrire de façon symboliques  $M \cdot F = 0$ . Une condition nécessaire et suffisante à l'existence de mouvements thermoconvectifs est que l'une au moins des inconnues soit non nulle, donc que l'équation matricielle admette une solution non triviale, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice  $M$  soit nul. Les coefficients de cette matrice ne dépendant que des caractéristiques des strates, de la taille réduite des cellules de convection et du nombre de Rayleigh nous obtenons ainsi une relation entre  $a$  et  $Ra^*$  :

$$H(a, Ra^*) = 0. \quad (32)$$

Le critère d'apparition de la convection naturelle est alors défini par la plus petite valeur de  $Ra^*$  satisfaisant à l'équation (32) soit

$$Ra_c^* = \min \{ Ra^* \mid \exists a : H(a, Ra^*) = 0 \}. \quad (33)$$

Connaissant le couple de valeurs critiques ( $a_c, Ra_c^*$ ) nous pouvons déterminer tous les termes  $f_i^{(m)}(0)$  à une constante multiplicative près, puis remonter aux expressions analytiques des perturbations  $\bar{\omega}$ ,  $w$  et  $\tau$ . Si l'on suppose que les cellules de convection sont des rouleaux d'axe parallèle à l'axe des  $y$ , la fonction  $\Psi(x, y)$  est une fonction sinusoïdale. En tenant compte de l'équation (9) on peut alors déterminer l'expression de  $u$ , puis celle de la fonction de courant  $\Psi(x, \xi)$  qui, au sein de la strate  $i$ , s'écrit

$$\Omega_i(x, \xi) = (1/a_c) \cos(a_c x/H) (\lambda_{vi}^*/\rho_i c_P) \{ Q_{\lambda i} a^2 f_i(\xi) - f_i^{(2)}(\xi) \}. \quad (34)$$

2.5. Etudes de cas particuliers

Un titre indicatif, nous avons appliqué cette méthode dans deux cas déjà connus par des travaux antérieurs.

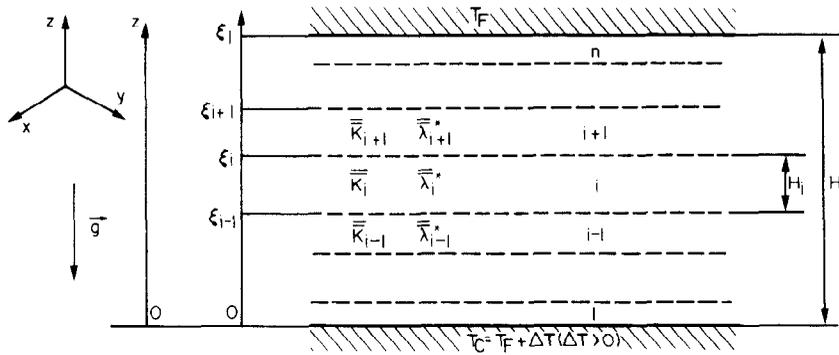


FIG. 1. Description du milieu.

Dans le cas d'une couche poreuse anisotrope limitée par deux surfaces horizontales et imperméables, nous avons bien retrouvé les résultats obtenus en 1975 par Epherre [5]. Les conditions de la convection correspondent à

$$Ra_c^* = \pi^2(\sqrt{Q_k} + \sqrt{Q_\lambda})^2 \quad \text{avec} \quad a_c = \pi^2/\sqrt{(Q_k Q_\lambda)} \quad (35)$$

Dans ce même cas, nous avons de plus précisé à une constante près les expressions des perturbations :

$$\tau(x, y, \xi) = Cte(1/\pi)\Psi(x, y)\sin(\pi, \xi)$$

$$w(x, y, \xi) = Cte \frac{\pi \lambda_i^{*2}}{H(\rho_r c_p) \Delta T} \frac{\sqrt{Q_k} + \sqrt{Q_\lambda}}{\sqrt{Q_k}} \Psi(x, y) \sin(\pi \xi)$$

$$\bar{\omega}(x, y, \xi) = Cte(1/\pi^2) \rho_r g H \alpha \frac{\sqrt{Q_\lambda}}{\sqrt{Q_k} + \sqrt{Q_\lambda}} \Psi(x, y) \cos(\pi \xi)$$

Dans le cas d'un bistraté constitué de deux couches horizontales isotropes, séparées par une paroi imperméable et infiniment mince, les caractéristiques de l'état critique ( $a_c$  et  $Ra_c^*$ ) sont en bon accord avec celles obtenues par une voie numérique (schéma bidimensionnel aux différences finies [12]).

3. ETUDE DE BISTRATES: RESULTATS NUMERIQUES

Mis à part le cas particulier précédent d'une strate unique, dans le cas général, la relative complexité des coefficients de la matrice  $M$  ne permet pas de déterminer de façon purement analytique le couple de valeurs critiques  $a_c$  et  $Ra_c^*$ . Pour cette raison, nous avons eu recours à un traitement numérique basé sur une double série d'approximations successives (pour  $a$  et  $Ra^*$ ), le déterminant étant calculé par la méthode de Gauss. Les résultats présentés ici sont relatifs à un milieu poreux saturé par un fluide de Boussinesq, limité par deux surfaces isothermes et imperméables, constitué de deux strates homogènes et isotropes, de caractéristiques  $H_1, K_1, \lambda_1^*$  et  $H_2, K_2, \lambda_2^*$ .

Nous avons tracé point par point les courbes donnant la valeur critique du nombre de Rayleigh et celle de la taille réduite des cellules de convection associée en fonction de la hauteur relative ( $H_1/H$ ) de la strate, et ce pour différentes valeurs des paramètres

caractérisant la couche poreuse:  $\lambda_1^*/\lambda_2^*$  et  $K_1/K_2$ , Figs. 2-4.

$Ra^*$  étant défini par l'équation (21) à partir de valeurs de référence fonctions de  $H_1/H$ , la valeur critique du nombre de Rayleigh, pour un bistraté donné, n'est pas directement associable à la valeur de l'écart de température correspondant, valeur qu'il peut être intéressant de comparer aux écarts de température critiques que l'on aurait si la couche poreuse toute entière était occupée par un seul milieu ayant soit les caractéristiques de la strate 1, soit celles de la strate 2. Pour des milieux homogènes et isotropes (monostraté), de même épaisseur, saturés par le même fluide et avec les mêmes conditions aux limites que pour les bistrates étudiés, l'écart de température critique  $\Delta T_{c,m}$  correspondant à l'apparition de la convection n'est fonction que du rapport  $K/\lambda$ , puisque l'on a, compte tenu du critère d'apparition  $Ra_{c,m}^* = 4\pi^2$ , équation (35) ou [3], et de l'expression de  $Ra^*$ , équation (21)

$$\Delta T_{c,m} = 4\pi^2 / \{(\rho_r c_p) \alpha (\rho_r / \eta) g H (K/\lambda^*)\} \quad (36)$$

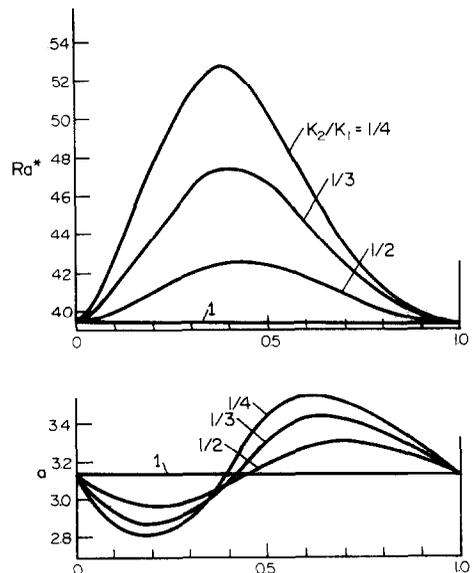


FIG. 2. Nombre de Rayleigh et nombre d'ondes critiques en fonction de  $H_1/H$  pour  $\lambda_2^* = \lambda_1^*$ .

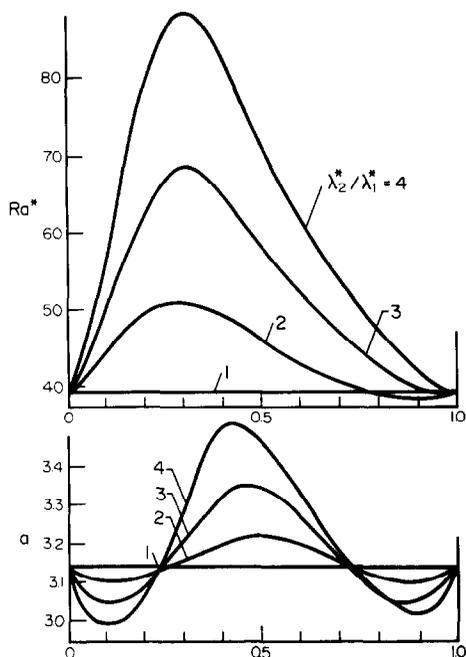


FIG. 3. Nombre de Rayleigh et nombre d'ondes critique en fonction de  $H_1/H$  pour  $(K_2/\lambda_2^*) = (K_1/\lambda_1^*)$ .

Pour des couches poreuses formées de deux strates telles que les rapports  $K_1/\lambda_1^*$  et  $K_2/\lambda_2^*$  sont égaux, soit telles que  $(\Delta T_c)_1 = (\Delta T_c)_2 = \Delta T_{c,m}$ , nous avons tracé les courbes donnant la valeur du rapport  $R_T$  entre les écarts de température critiques  $\Delta T_c$  et  $\Delta T_{c,m}$  associés respectivement au bistraté et à l'un quelconque des deux monostrates possibles :

$$P_T = \Delta T_c / \Delta T_{c,m} = (Ra_c^* / 4\pi^2) \{ (K_1 / \lambda_1^{*2}) / (K_2 / \lambda_2^{*2}) \}. \quad (37)$$

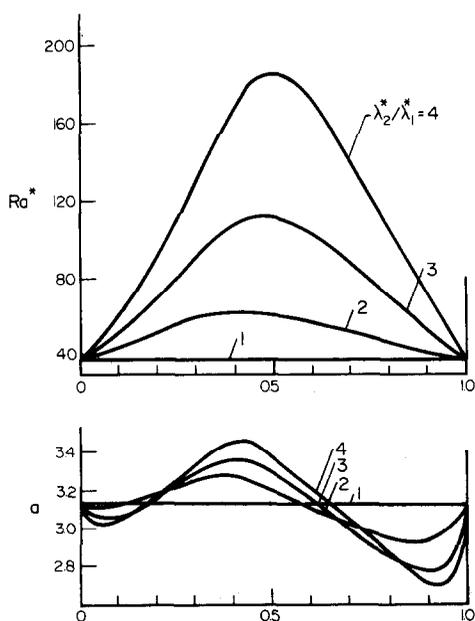


FIG. 4. Nombre de Rayleigh et nombre d'ondes critique en fonction de  $H_1/H$  pour  $(K_2/\lambda_2^{*2}) = (K_1/\lambda_1^{*2})$ .

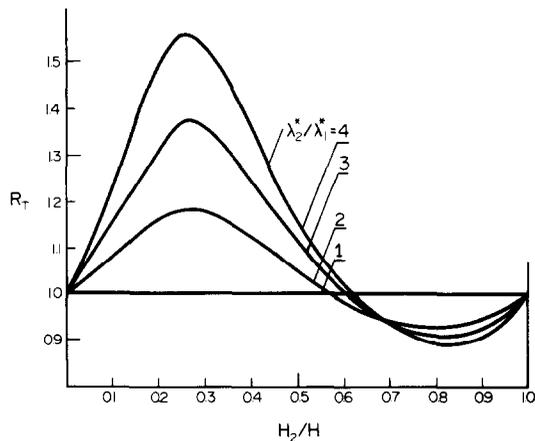


FIG. 5.  $R_T = \Delta T_c / \Delta T_m$  en fonction de la hauteur relative  $H_1/H$ .

Nous remarquons sur la Fig. 5 qu'il est possible de constituer certains bistrates tels que la convection y apparaisse pour des écarts de température plus faibles que dans chacun des monostrates correspondant ( $R_T > 1$ ) mais qu'il existe également des associations de 2 strates où  $\Delta T_c$  est notablement supérieur à  $\Delta T_{c,m}$ .

Un raisonnement identique, établi quant à lui à partir des densités surfaciques de flux de chaleur critique et pour des strates telles que  $K_1/\lambda_1^{*2} = K_2/\lambda_2^{*2}$ , nous permettrait de faire, pour ces bistrates, des remarques analogues. Sur la Fig. 6, nous avons tracé les variations de  $R_{\phi_0}$  en fonction de  $H_1/H$ ,  $R_{\phi_0}$  étant défini par

$$R_{\phi_0} = \phi_{0c} / \phi_{0c,m} = (Ra_c^* / 4\pi^2) \{ (K_1 / \lambda_1^{*2}) / (K_2 / \lambda_2^{*2}) \}. \quad (38)$$

L'allure des lignes de courants, lorsque la convection apparaît est présentée sur les Figs. 7 et 8, dans le cas de bistrates constitués de deux strates de même épaisseur et de caractéristiques différentes. Outre la réfraction des lignes de courant observée à l'interface entre les deux strates, lorsque celles-ci n'ont pas la même perméabilité, nous constatons le rôle prépondérant

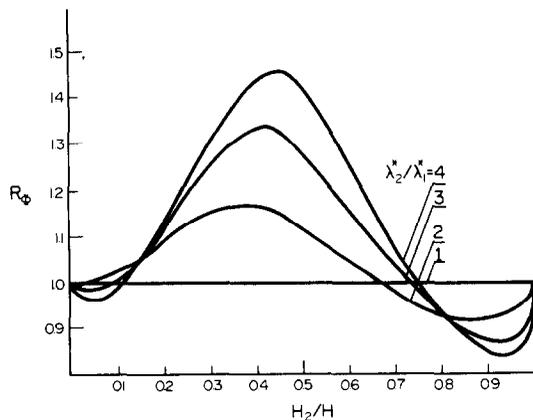


FIG. 6.  $R_{\phi_0} = \phi_{0c} / \phi_{0c,m}$  en fonction de la hauteur relative  $H_1/H$ .

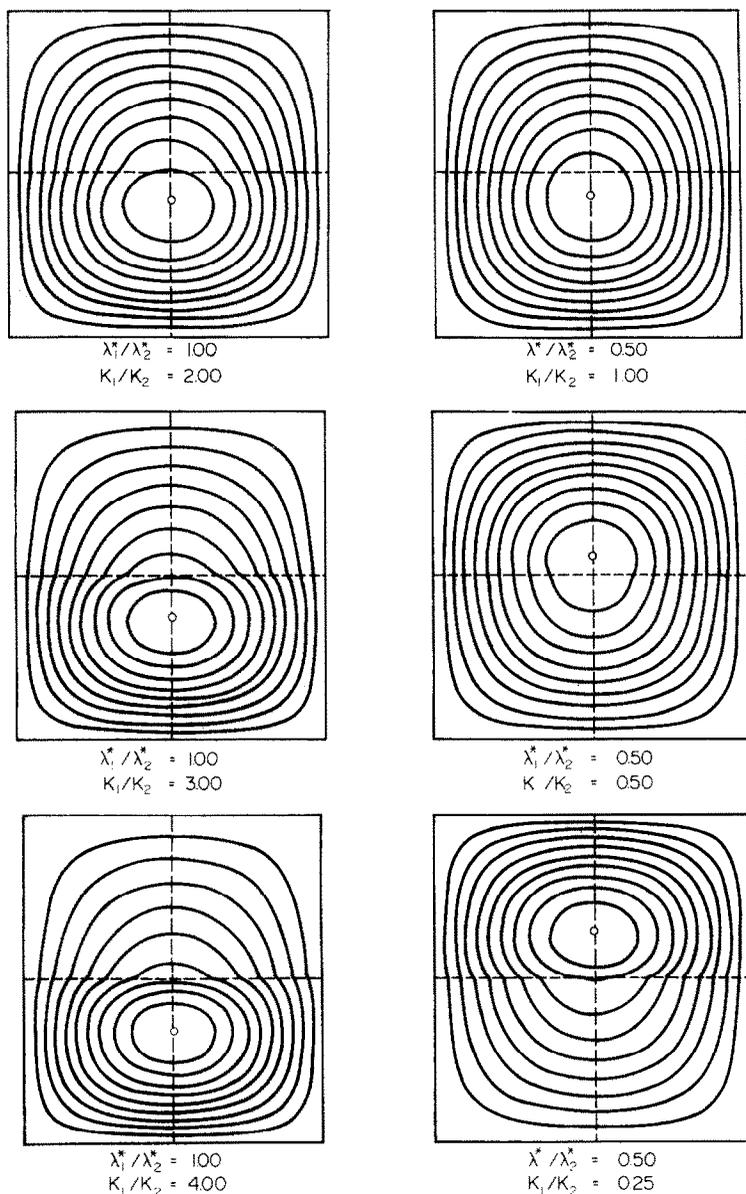


FIG. 7. Allure des lignes de courant à l'apparition de la convection (I).

joué par le rapport des perméabilités  $K_1/K_2$  dans la forme des cellules de convection.

#### 4. ETUDES DE BISTRATES: RESULTATS EXPERIMENTAUX

##### 4.1. Dispositif expérimental

La cellule utilisée est constituée d'un bloc de makrolon, (conductivité thermique  $\lambda \simeq 0,3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) de dimensions internes,  $L = 0,61$ ,  $l = 0,37$ ,  $H = 0,06 \text{ m}$ . Les dimensions relatives  $L/H$  et  $l/H$  sont largement supérieures à 3, valeur minimale pour comparer les Rayleigh critiques numériques et expérimentaux [13]. La plaque froide est maintenue isotherme à l'aide d'une circulation d'eau, une puissance électrique constante est dissipée uniformément dans la plaque chaude.

La mesure des températures au sein du milieu se fait par des thermocouples cuivre-constantan, gainés d'acier inoxydable. Ces thermocouples se déplacent suivant l'axe de ressort hélicoïdaux tendus dans le milieu; on a vérifié que ces accessoires étaient sans influence notable sur les valeurs du champ thermique dans le milieu.

Les strates poreuses sont constituées par des billes de verre ou de plomb, de diamètre  $d$ , et séparées par un grillage de nylon et sont saturées d'eau.

##### 4.2. Détermination des nombres de Rayleigh apparents

Pour chaque essai on a défini un nombre semblable au nombre de Rayleigh de filtration. Ce nombre de Rayleigh apparent est évalué par

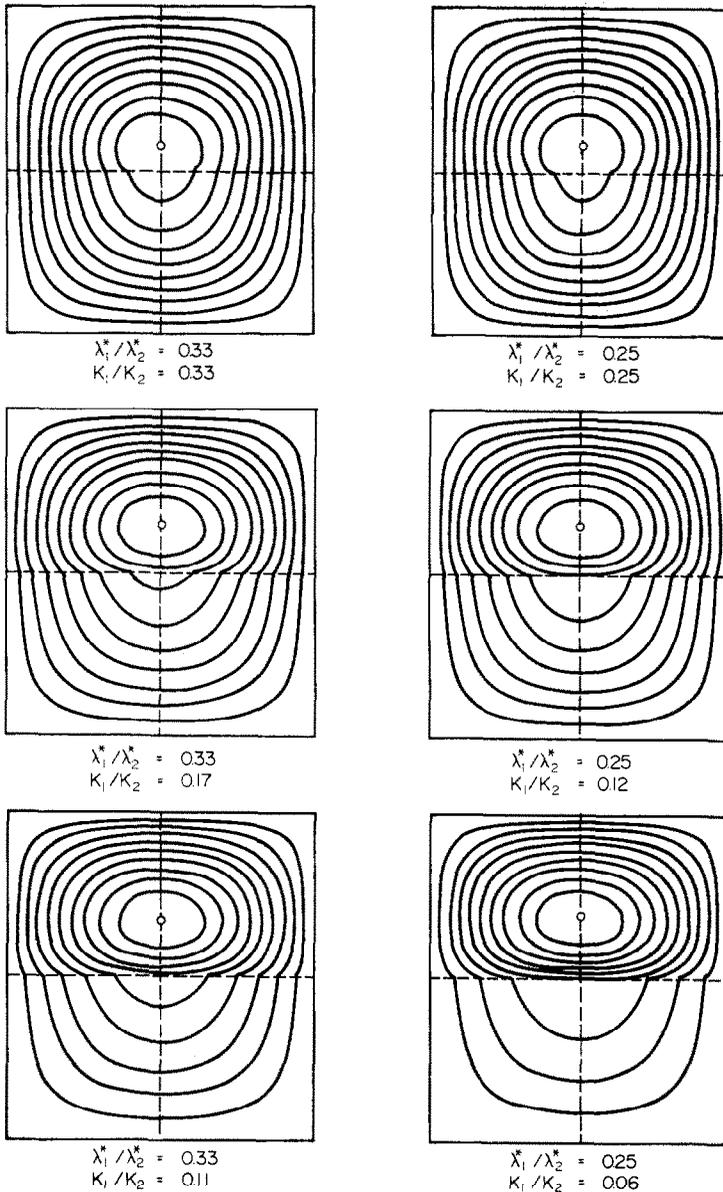


FIG. 8. Allure des lignes de courant à l'apparition de la convection (II).

$$Ra_a^* = Ag\Delta TH(K_r/\lambda_r^*)$$

où  $A$  est un paramètre caractéristique du fluide saturant, tabulé en fonction de la température ( $A = \rho c_p \beta_{ih} / \eta$ ).

La perméabilité de chaque couche a été évaluée par la formule de Kozeny-Carman et la perméabilité de référence  $K_r$  est définie par

$$K_r = \left( \sum_i H_i K_i \right) / H.$$

De même la conductivité thermique de chaque strate a été mesurée dans un conductivimètre cylindrique ou estimée à partir d'expériences de convection naturelle réalisées sur des couches uniques homogènes, dans le cas où l'on peut admettre que  $Ra_c^* = 4\pi^2$  [14].

La conductivité thermique équivalente de référence  $\lambda_r^*$  est alors définie par

$$\lambda_r^* = H / \left( \sum_i H_i / \lambda_i \right).$$

Etant donné la part importante des fuites thermiques au voisinage de la plaque chaude, il ne nous est pas possible de faire des mesures directes du nombre de Nusselt associé aux seuls transferts à travers la couche poreuse. Les mesures de flux de chaleur n'ayant pour but que l'appréciation des conditions d'apparition de la convection, nous avons utilisé des évaluations comparatives de flux.

En prenant pour référence les valeurs correspondant à la cassure de la courbe puissance dissipée — écart

Tableau 1. Caractéristique des bistrates étudiés

Série	Matrice solide	Hauteur (mm)	Porosité	$K$ ( $m^2$ )	$\lambda^*$ ( $W m^{-1} K^{-1}$ )	Observations
A	Strate Sup.	verre $\phi 2$ 30,0 (50%)	0,388	$3,61 \times 10^{-9}$	0,82	$k_r = 3,61 \times 10^{-9}$ $\lambda_r^* = 0,82$
	Strate Inf.	verre $\phi 2$ 30,0 (50%)				
B	Strate Sup.	verre $\phi 4$ 14,7 (24,5%)	0,381	$13,36 \times 10^{-9}$	0,82	$k_r = 5,79 \times 10^{-9}$ $\lambda_r^* = 0,82$
	Strate Inf.	verre $\phi 2$ 45,3 (75,5%)				
C	Strate Sup.	verre $\phi 2$ 29,7 (49,5%)	0,388	$3,61 \times 10^{-9}$	0,82	$k_r = 9,05 \times 10^{-9}$ $\lambda_r^* = 0,82$
	Strate Inf.	verre $\phi 4$ 30,3 (50,5%)				
D	Strate Sup.	verre $\phi 2$ 27,0 (45%)	0,380	$3,30 \times 10^{-9}$	0,82	$k_r = 8,74 \times 10^{-9}$ $\lambda_r^* = 1,51$
	Strate Inf.	plomb $\phi 4$ 33,0 (55%)				

de température, (soit  $W_{er}$  et  $\Delta T_r$ ), le nombre de Nusselt apparent est alors défini par

$$Nu_a^* = (W_e/W_{er})/(\Delta T/\Delta T_r).$$

#### 4.3. Evaluation des valeurs critiques

En supposant que les fuites thermiques évoluent de manière continue, nous admettons que la cassure de la courbe  $W_{er} - T_r$  correspond à un changement du mode de transfert au sein de la couche i.e. à l'apparition de la convection. La valeur correspondante de  $Ra_a^*$  ainsi obtenue peut être comparée aux valeurs calculées dans les mêmes conditions.

#### 4.4. Résultats

Le Tableau 1 rassemble les caractéristiques de

différents bistrates que nous avons étudiés.

La Fig. 9 présente les différents types d'évolution observés suivant la nature des milieux: on peut constater que l'évolution de  $Nu_a^*$  en fonction de  $Ra^*/Ra_c^*$  n'est pas unique. Chacune de ces courbes correspond à une dizaine d'essais.

Le Tableau 2 rassemble les résultats théoriques et expérimentaux. La Fig. 10 présente une estimation de l'intervalle de confiance sur quelques résultats expérimentaux: les milieux sont tels que  $\lambda_1/\lambda_2 = 1$  et  $K_1/K_2 = 4$ , le rapport  $H_1/H$  varie de 0 à 0,77. L'incertitude sur les valeurs de  $Ra_c^*$  est de l'ordre de 10%; cette précision est essentiellement limitée par la détermination des conductivités thermiques équivalente et la mesure des écarts de température.

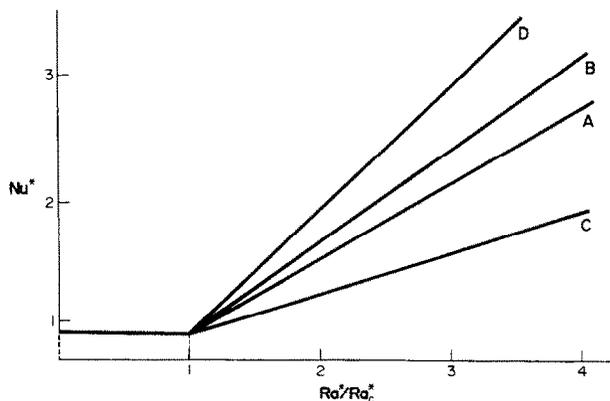


FIG. 9. Relation  $Nu^*/Ra^*$  pour différents milieux.

Tableau 2. Comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux

Série	A	B	C	D
				$\lambda_1^* \neq \lambda_2^*$
$Ra_c^*$				
théorique	39,48	09,40	50,21	79,75
expérimental	38	47	51	82

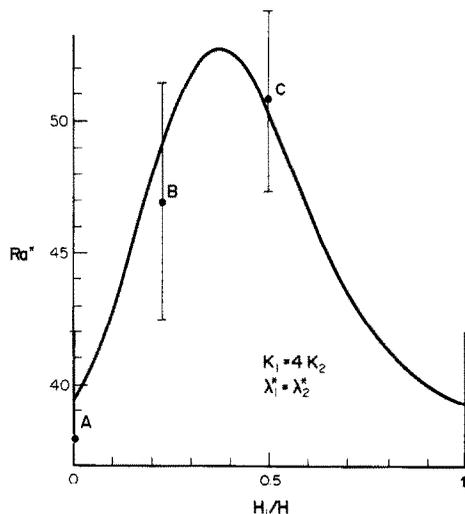


FIG. 10. Intervalle de confiance des résultats expérimentaux et courbe théorique correspondante (—).

### 5. CONCLUSION

Une étude très générale des équations décrivant les transferts de chaleur et de masse au sein de milieu poreux a été présentée.

La limitation théorique de cette méthode se situe au niveau de la validité de la description faite du milieu : en particulier nous avons décrit les échanges thermiques à l'aide d'une seule équation, sans tenir compte des échanges locaux solide-fluide.

Les expériences réalisées montrent que le modèle proposé donne un accord satisfaisant en ce qui concerne les valeurs de  $Ra_c^*$ , pour un certain nombre de bistrates.

Sans restreindre la généralité du mode de résolution proposé, il faut remarquer que la mise en oeuvre de cette méthode dans le cas de milieux comprenant plus de deux strates entraîne des calculs très lourds que nous n'avons pas entrepris.

Enfin nous ferons remarquer que cette modélisation peut être étendue à l'étude d'un milieu poreux dont les propriétés physiques varient dans l'espace, et de ce fait, par exemple, ne satisfait plus nécessairement à l'hypo-

thèse de Boussinesq. A titre d'illustration, la référence [9] présente le calcul théorique des paramètres critiques dans le cas de multistrates où les paramètres physiques évoluent dans l'espace.

**Remerciements**—Ces résultats, partiellement exposés au quinzième Congrès International du Froid à Venise (Sept. 1979), ont été obtenus avec le soutien financier de la Société Isover-Saint Gobain (C.R.I.R. Rantigny) et de la Délégation aux Economies de Matières Premières (D.E.M.P.).

### BIBLIOGRAPHIE

1. C. W. Horton et F. I. Rogers, Convection currents in a porous medium. *J. appl. Phys.* **16**, 367–370 (1945).
2. E. R. Lapwood, Convection of fluid in porous medium, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **44**, 508–521 (1948).
3. M. Combarous et S. Bories, Hydrothermal convection in saturated porous medium, in *Advances in Hydroscience*, vol. 10, pp. 231–307. Academic Press (1975).
4. G. Castinel et M. Combarous, Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope horizontale, *C. r. Acad. Sci., Paris* **278B**, 701–704 (1974).
5. J. F. Epherre, Criterion for the appearance of natural convection in an anisotropic porous layer, *Int. chem. Engng* **17**, 615–616 (1977).
6. O. Kvernfold et P. A. Tyvand, Non-linear convection in anisotropic porous media, *J. Fluid Mech.* **90**, 609–624 (1979).
7. J. F. Epherre, Convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope saturée par un gaz parfait. Thèse de spécialité, Université de Bordeaux I (1976).
8. T. Green, Marginal stability in inhomogeneous porous media, *J. appl. Phys.* **40**, 1759–1762 (1969).
9. R. McKibbin et M. J. O'Sullivan, Onset of convection in layered porous medium heated from below, *J. Fluid Mech.* **96**, 375–393 (1980).
10. J. P. Richard, Convection naturelle en milieux poreux stratifiés. Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Bordeaux I (1979).
11. J. C. Hadlik, *La Transformation de Laplace à Plusieurs Variables*. Editions Masson (1969).
12. J. Gounot, Convection naturelle au sein de deux couches poreuses superposées. Note laboratoire de Mécanique Physique, Université de Bordeaux I (1979).
13. J. Beck, Convection in a box of porous material saturated with fluid. *Physics Fluids* **15**, 1377–1383 (1972).
14. M. Combarous, Convection naturelle et convection mixte en milieu poreux. Thèse Paris (1970).

### CRITERION FOR THE ONSET OF NATURAL CONVECTION IN STRATIFIED POROUS LAYERS\*

**Abstract**—A very general model for the theoretical determination of natural convection appearance in porous media is proposed. This model describes a medium composed of  $n$  anisotropic porous layers. The classical system of partial derivative equations is turned into a  $4n - 4$  ordinary differential 4 order equations set by the mean of Laplace transform. Further the method is expanded in the case of a medium composed of two homogeneous and isotropic layers, saturated by a fluid which obeys the Boussinesq assumption.\*

### EIN KRITERIUM FÜR DAS EINSETZEN DER FREIEN KONVEKTION IN GESCHICHTETEN PORÖSEN MEDIEN

**Zusammenfassung**—Es wird ein allgemeingültiges Modell zur theoretischen Bestimmung des Einsetzens der freien Konvektion in porösen Medien vorgeschlagen. Dieses Modell beschreibt ein Medium, das aus  $n$  anisotropen porösen Schichten besteht. Das klassische Gleichungssystem partieller Differentialgleichungen wird mit Hilfe der Laplace-Transformation in einen Satz von  $4n - 4$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 4. Ordnung übergeführt. Ferner wird das Verfahren auf den Fall eines Mediums erweitert, das aus zwei homogenen und isotropen Schichten besteht und mit einem Fluid angereichert ist, das der Boussinesq-Näherung genügt.

### КРИТЕРИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ПОРИСТЫХ СЛОЯХ

**Аннотация** — Предложена весьма общая модель для теоретического определения возникновения естественной конвекции в пористых средах. Модель описывает среду, состоящую из  $n$  анизотропных пористых слоев. С помощью преобразования Лапласа классическая система уравнений в частных производных преобразуется в систему  $4n - 4$  обыкновенных дифференциальных уравнений 4 порядка. Предложенный метод использован затем для описания среды, состоящей из двух однородных и изотропных слоев, насыщенных жидкостью, в приближении Буссинеска.